UDK-539.12.01

KLASSİK VEKTOR SAHƏLƏRİN KANONİK VƏ FIRLANMA ÇEVRİLMƏLƏRİ HAQQINDA

Ə.Q.AĞAMALIYEV
Bakı Dövlət Universiteti
gulu oglu@mail.ru

Təqdim olunan məqalədə klassik sahə vektoru funksiyalarının sonsuz kiçik kanonik çevirmələr zamanı dəyişməsi ilə koordinat sisteminin firlanması zamanı dəyişməsi arasında əlaqə tədqiq edilmişdir. Göstərilmişdir ki, həmin əlaqə hərəkət miqdarı momenti vektorunun çevrilməsindəki əlaqə kimidir. Bu müddanı isbat etmək üçün sfera üzrə təyin olunmuş funksiyalardan, qrup üzrə təyin olunmuş funksiyalara keçmək metodundan istifadə edilmişdir.

Açar sözlər: kanonik çevirmələr, vektor sahə, fırlanma.

P.A.M.Dirakın kitabında belə bir tezis irəli sürülmüşdür: "Klassik analoqları olan sistemlər üçün operatorların Unitar çevirmələri klassik mexanikadaki kanonik çevirmələrin analoqlarından ibarətdir" [1].

Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, klassik fiziki kəmiyyətlərin müxtəlif çevirmələr zamanı onların xassələrinin öyrənilməsi əhəmiyyət kəsb edir. Bu qəbildən olan məsələlərə birinci dəfə akademik Fok diqqət yetirmiş və Dirakın tezisini isbat etmişdir [2].

Bu nöqteyi-nəzərdən klassik fizikada vektor sahələrinin kanonik çevirmələrənin öyrənilməsi maraqlıdır. Belə məsələyə bəzi ədəbiyyatlarda rast gəlinir [3]. Bu kitabda vektor sahənin kanonik çevirmələr zamanı dəyişməsi ilə fırlanma əməliyyatı zamanı dəyişmələri arasında əlaqə tapılmışdır. Göstərilmişdir ki, bu əlaqə yalnız və yalnız hərəkət miqdarı momenti vektoru üçün doğrudur.

Baxılan işdə həmin əlaqələrin istənilən vektor sahə üçün doğru olduğunu isbat etməyə çalışmışıq. Məsələni həll etmək üçün vektor sahəsinin vektorları komponentlərinin seçilməsi metodundan istifadə etmişik [4].

Mexaniki sisteminin hərəkət inteqralına sonsuz kiçik kanonik çevirmələrin yaradıcı funksiyaları kimi baxılması fiziki kəmiyyətlər arasında bəzi münasibətlər yaradır. Həmin münasibətlər Puasson mötərizələri ilə ifadə olunurlar.

Göstərmək olur ki, sistemin Hamilton funksiyası H sistemin sonsuz kiçik dt zamanında baş verən kanonik çevirmənin yaradıcı funksiyasıdır. Sistemin ümumiləşmiş impulsu P_i sistemin q_i ümumiləşmiş impulsunu dəyişməyən sonsuz kiçik çevirmənin yaradıcı funksiyasıdır. Mexaniki sistemin $\vec{n}$ vahid vektoru ətrafında fırlanması zamanı koordinat və impulsun dəyişməsinin yaradıcı funksiyası ($\vec{L}\vec{n}$) – skalyar hasili ilə təyin olunur.

Ümumiləşmiş impuls p_i və ümumiləşmiş koordinat q_i dəyişənlərindən asılı $f(q_i, p_i)$ funksiyasının sonsuz kiçik kanonik çevirmə zamanı dəyişməsi

$$\delta f = \varepsilon [f, G] \tag{1}$$

dusturu vasitəsilə ifadə olunur [3]. Burada ε -kanonik çevirmənin sonsuz kiçik parametri, G-çevirmənin yaradıcı funksiyasıdır.

Bu düsturu vektor funksiyalara tətbiq edərkən maraqlı ifadələr və nəticələr alınır. Yuxarıdakı (1) düsturun kanonik dəyişənlərdən asılı $\vec{F}$ (p_i, q_i) vektor funksiyaya tətbiq etdikdə

$$\delta \vec{F} = d\theta [\vec{F}, (\vec{L}\vec{n})] \tag{2}$$

ifadəsini yaza bilərik.

Kanonik çevirmə zamanı funksiyanın dəyişməsi dedikdə funksiyanın ədədi qiymətcə dəyişməsini başa düşürdük. Başqa sözlə desək (2) düsturunu vektorun komponentləri üçün yazsaq:

$$\partial F_x = F'_x(q'_i, p'_i) - F_x(q_i, p_i) = d\theta [F_x (\vec{L}\vec{n})]$$

fərqini başa düşürük.

Burada $F_x(q'_i, p'_i)$ və $F_x(q_i, p_i)$ ifadələri $\vec{F}(q_i, p_i)$ vektorunun yeni və köhnə kanonik dəyişmələrə görə yazılmış x- oxu üzrə komponentləridir.

Skalyar funksiyanın bir koordinatdan digərinə keçdikdə onun nöqtədəki qiymətinin dəyişməz qaldığını, lakin onun analitik ifadəsinin dəyişdiyini bilirik. Bir koordinat sistemində digərinə keçdikdə vektoru funksiyanın dəyişməsi həm onun analitik ifadəsinin, həm də vektorun özünün dəyişməsi hesabına baş verir. Ona görə də vektor funksiyanın z oxu ətrafında fırlanma zamanı dəyişməsi

$$F_x(q, p) = F'_x(q'_i, p'_i) + F'_y(q'_i, p'_i) d\theta$$

$$F_y(q, p) = F'_y(q'_i, p'_i) - F'_x(q'_i, p'_i) d\theta \tag{3}$$

$$F_z(q, p) = F'_z(q'_i, p'_i)$$

düsturları vasitəsilə ifadə edilir.

Burada $F'_x(q'_i, p'_i)$, $F'_y(q'_i, p'_i)$ və $F'_z(q'_i, p'_i)$ yeni dəyişənlərin yeni funksiyalarıdır.

Bu ifadədən istifadə edərək verilmiş vektorun sonsuz kiçik kanonik çevirmə zamanı dəyişməsi (2) ilə adi fırlanma zamanı vektorun çevrilməsi arasında əlaqəni tapmaq olar. Bunun üçün tutaq ki, vektorun köhnə və yeni komponentlərinin köhnə və yenə dəyişənlərdən asılılıqları eynidir, yəni $F'_x(q'_i, p'_i)$ və $F_x(q'_i, p'_i)$ eynidir. Belə vektor funksiyaya misal olaraq hərəkət miqdarı momentini misal göstərmək olar [3].

Dogrudan da bu vektor üçün

$$L_x = \sum_i (y_i p \ \_ z_i p_{iy})$$

$$L_{x'} = \sum_i (y'_i p'_{iz} \_ z'_i p'_{iy})$$

Yəni $L_{x'}$ funksiyası q'_i, p'_i dəyişənlərindən necə asılıdırsa L_x funksiyası da q_i,p_i dəyişənlərindən eyni şəkildə asılıdır.

Bu xassəyə malik olan funksiyalar üçün (3) düsturlarını

$$F_x(q_i, p_i) = F_x(q'_i, p'_i) + F_y(q'_i, p'_i)d\theta$$

$$F_y(q_i, p_i) = F_y(q'_i, p'_i) - F_x(q'_i, p'_i)d\theta \tag{4}$$

$$F_z(q_i,p_i) = F_z(q'_i, p'_i)$$

şəklində yaza bilərik .

Aldığımız bu ifadələrdə $F_y(q'_i, p'_i)d\theta$ və $F_x(q'_i, p'_i)d\theta$ funksiyalarını birinci tərtibdən sonsuz kiçik dəqiqliyi ilə $F_y(q_i, p_i)d\theta$ və $F_x(q_i, p_i)d\theta$ kimi ifadə edə bilərik. Onda alırıq ki:

$$F_x(q'_i, p'_i) - F_x(q_i, p_i) = -F_y(q_i, p_i)d\theta$$

$$F_y(q'_i, p'_i) - F_y(q_i, p_i) = F_x(q_i, p_i)d\theta \tag{5}$$

$$F_z(q'_i, p'_i) - F_z(q_i, p_i) = 0$$

Aldığımız bu ifadələr tərpənməz vektorun komponentlərinin koordinat sistemini $d\theta$ bucağı qədər z – oxu ətrafında fırlanma zamanı dəyişməsi ilə üst-üstə düşür. Buna gorə də yaza bilərik:

$$d\vec{F} = d\theta[\vec{n}\vec{F}] = \delta\vec{F} \tag{6}$$

Deməli,

$$[\vec{F},(\vec{L}\vec{n})]=[\vec{n}x\vec{F}] \qquad (7)$$

Yəni $\vec{F}(q_i, p_i)$ vektor funksiyanın sonsuz kiçik kanonik çevirmə zamanı dəyişməsi həmin vektorun hər hansı ox ətrafında sonsuz kiçik $d\theta$ bucağı qədər fırlanma zamanı dəyişməsinə bərabərdir. Qeyd edək ki, bu nəticəni yalnız hərəkət miqdarı momenti vektoru üçün aldıq.

İndi göstərək ki, bu münasibəti ixtiyari $\vec{F}(q_i, p_i)$ vektor funksiyası üçün də yazmaq olar. Bunun üçün vektorun komponentlərini uyğun şəkildə seçməliyik. Bu məqsədlə sfera üzrə təyin olunmuş vektor funksiyalara baxmaq daha məqsədə uyğundur [4]. Çünki fırlanma əməliyyatı zamanı mərkəzi kordinat başlanğıcında olan sferanın nöqtələri sfera üzərində qalırlar. Bu zaman $\vec{F}(q_i, p_i)$ funksiyasının komponentlərini elə seçmək lazımdır ki, onlar fırlanma zamanı bir-birindən asılı olmayaraq çevrilsinlər. Bu məqsədlə vektor funksiyanın komponentlərindən biri olaraq sferaya normal olan $F_r(q_i, p_i)$ komponentini seçmək olar. Sferaya normal olan komponent fırlanmadan sonra da sferaya normal olaraq qalacaqdır. Vektorun qalan iki komponentini seçmək üçün sfera üzrə təyin olunmuş $F(\theta,\varphi)$ funksiyasından $F(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)$ Eyler bucaqlarından asılı olan funksiyalara keçək. Bu məqsədlə sferanın ixtiyari M nöqtəsində e_1, e_2, e_3 vektorlarına malik olan ortonormal reper seçək. Reperin e_3 vektoru sferanın səthinə normal olsun. Belə təyin olunmuş reperi sferanın şimal qütbündə yerləşmiş və vektorları koordinat oxları istiqamətində yönəlmiş reperdən hər hansı $g(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)$ fırlanması vasitəsilə almaq olar. Əvvəlcə reperin başlanğıc nöqtəsinin (ϑ,φ) polyar kordinatları ilə fırlanmanı təyin edən $(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)$ Eyler bucaqları arasındakı əlaqəni yadımıza salaq:

Həmin əlaqə $\qquad \vartheta=\theta, \qquad \varphi_2=\pi/2+\varphi \qquad (8)$

şəklindədir. Doğrudan da g fırlanması zamanı sferanın şimal qütbünün gəldiyi nöqtə çevirmə matrisası $/g/_{ik}$-nın üçüncü sətrinin elementləri g_{31}, g_{32}, g_{33}, ilə təyin olunur. Onları həmin nöqtənin dekart koordinatları $\sin\varphi_2\sin\theta$, $-\cos\varphi_2\sin\theta$ və $\cos\theta$ ilə müqayisə etsək yuxarıdakı münasibətləri alarıq. (8) ifadəsi göstərir ki, M nöqtəsi φ_1 Eyler bucağından asılı deyil. Reperin sferaya normal olan e_3 komponenti M nöqtəsinin vəziyyəti ilə təyin olunduğundan o da φ_1 -dən asılı olmayacaq. e_1 və e_2 vektorları sferaya toxunan müstəvi üzərində olduqlarına görə φ_1 bucağından asılı olacaqlar. Bu asılılığı tapmaq üçün iki g=$g(\varphi_1,\vartheta,\varphi_2)$ və $g_1=g(\varphi_1+\varphi',\theta,\varphi_2)$ fırlanmalarına baxaq; Aydındır ki, bu çevirmələr sferanın şimal qütbündə yerləşən reperi başlanğıcları eyni bir nöqtədə olan və müxtəlif e_1 və e_2 oxlarına malik olan iki reperə çevirəcək. Birinci reperin vektorlarını e_1və e_2 , ikinci vektorun reperlərini e'_1, e'_2 –lə işarə etsək , alarıq ki,

$$
\begin{aligned}
e'_1 &= e_1 \cos\varphi' + e_2 \sin\varphi' \\
e'_2 &= -e_1 \sin\varphi' + e_2 \cos\varphi'
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Aldığımız bu ifadələrdə $\varphi_1 = \pi$ və $\varphi' = \varphi_1$ işarə etsək

$$
\begin{aligned}
e_1(\varphi_1 + \pi, \vartheta, \varphi_2) &= e_1^0 \cos\varphi_1 + e_2^0 \sin\varphi_1 \\
e_2(\varphi_1 + \pi, \vartheta, \varphi_2) &= -e_1^0 \sin\varphi_1 + e_2^0 \cos\varphi_1
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ifadəsini alarıq. Burada ki, $e_1^0 = e_1(\pi, \theta, \varphi_2)$ və $e_2^0 = e_2(\pi, \theta, \varphi_2)$ vektorları sferanın M nöqtəsində paralelə və meridiana toxunan istiqamətdə yönəlmiş vahid vektorlardır. Doğrudan da $/g_{ik}/$ matrisasında $\varphi_1 = \pi$ qəbul etsək e_1 və e_2 vektorlarının dekart koordinatları üçün $e_1 = (-\cos\varphi_2, \sin\varphi_2 0)$ və $e_2 = (\cos\theta \sin\varphi_2, -\!-\cos\theta\cos\varphi_2, -\sin\theta)$ ifadələrini alarıq. Digər tərəfdən M nöqtəsində paralelə toxunan istiqamətində çəkilmiş e_φ vahid vektorunun komponentləri $(-\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$ meridiana toxunan istiqamətində çəkilmiş e_θ vektorunun komponentləri $(\cos\vartheta\cos\varphi, -\cos\vartheta\sin\varphi, -\!-\sin\vartheta)$ şəklindədir.

M nöqtəsinin ϑ, φ sferik koordinatları ilə Eyler bucaqları arasındakı əlaqə (8) düsturunu nəzərə alsaq

$e_1^0 = -e_\varphi$ $\quad e_2^0 = e_\vartheta$ olduğunu görərik.

Beləliklə, alırıq ki,

$$
\begin{aligned}
e_1(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= -e_\varphi \cos\varphi_1 + e_\vartheta \sin\varphi_1 \\
e_2(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= e_\varphi \sin\varphi_1 + e_\vartheta \cos\varphi_1 \\
e_3(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= e_r
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Burada $e_\varphi, e_\vartheta, e_r$ vektorları M nöqtəsində paralelə və meridiana toxunan və sferaya normal olan vahid vektorlardır. Bir daha qeyd edək ki,

$$\varphi = -\pi/2 + \varphi_2, \qquad \vartheta = \theta$$

Bundan sonra istənilən $\vec{F} = (q, p)$ vektor funksiyanı baxdığımız reperin vektorlarına görə ayırsaq F_1, F_2, F_3 komponentlərini alarıq. Bu komponent funksiyalarda reperin vektorları kimi $\varphi_1, \vartheta, \varphi_2$ bucaqlarından asılı olacaqlar. Doğrudan da (11) düsturunun hər iki tərəfini skalyar olaraq $\vec{F}(q,p)$ vektoruna vursaq

$$F_1(\varphi_1+\pi,\theta,\varphi_2) = -F_\varphi \cos\varphi_1 + F_\vartheta \sin\varphi_1$$
$$F_2(\varphi_1+\pi,\theta,\varphi_2) = F_\varphi \sin\varphi_1 + F_\vartheta \cos\varphi_1 \qquad (12)$$
$$F_3(\varphi_1+\pi,\theta,\varphi_2) = F_r$$

düsturlarını alarıq. Bildiyimizə görə $\vec{F}$ vektorunun $F_r, F_\vartheta, F_\varphi$ sferik komponentləri ilə dekard kordinatları arasındakı əlaqə düsturunu

$$F_\varphi(\theta,\varphi) = -F_x \sin\varphi + F_y \cos\varphi$$
$$F_\vartheta(\theta,\varphi) = F_x \cos\theta\cos\varphi + F_y \cos\theta\sin\varphi - F_z \sin\theta \qquad (13)$$
$$F_r(\theta,\varphi) = F_x \sin\theta\cos\varphi + F_y \sin\theta\sin\varphi + F_z \cos\theta$$

şəklində olduğunu bilərək F_1, F_2, F_3 komonentləri ilə F_x, F_y, F_z komponentləri arasındakı əlaqə düsturunu yaza bilərik.

Beləliklə, F_1, F_2, F_3 funksiyalarının fırlanma zamanı necə çevrildiklərini tapa bilərik. Baxdığımız $\vec{F}(q,p)$ vektor sahəni və reperi eyni bir fırlatmaya məruz qoysaq, onda $\vec{F}'(q',p')$ yeni vektorun yeni reper vektorlarına nəzərən komponentlərinin, $\vec{F}(q,p)$ köhnə vektorun köhnə reperə nəzərən komponentləri ilə üst-üstə düşdüyünü görərik. Deməli, verilmiş $\vec{F}(q,p)$ vekrorunun komponentlərini yuxarıda ifadə olunan üsulla təyin etmiş olsaq, onda həmin komponentlərin çevrilməsi hərəkət miqdarı momentinin komponentlərinin çevrilməsi qanunu kimi olacaqdır.

Bu isə öz növbəsində o deməkdir ki, (7) düsturu ixtiyari vektorun çevrilməsi üçün doğrudur.

ƏDƏBİYYAT

1. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М., 1960, 26, с. 150.
2. Фок В.А. Вестник ЛГУ, 1959, №16, с.67.
3. Голдстейн Г. Классическая механика. М., 1957, с. 285, 259-295.
4. Гельфонд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958, с.368.

О КАНОНИЧЕСКОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИИ

А.Г.АГАМАЛЫЕВ

РЕЗЮМЕ

В предложенной статье исследуется связь между изменениями классического векторного поля при бесконечно малым каноническим преобразованием и вращении координатной системы. Показано, что изменение произвольного классического векторного поля совпадает с изменением вектора момента количества движения. Для доказательства этого утверждения использовался метод перехода от функции заданной на сфере к функциям заданным на группе.

Ключевые слова: канонические преобразования, векторное поле, вращение

ON CANONICAL AND ROTATIONAL TRANSFORMATIONS OF VECTOR FUNCTIONS

A.G.AGAMALIYEV

SUMMARY

The article investigates the relationship between changes in the classical vector field at an infinitesimal canonical transformation and the rotation of the coordinate system. It is shown that the change of any classical vector field coincides with that of a vector of the moment of quantity of movement. For the proof of this statement the method of transition from the function set on sphere to functions set on a group was used.

Key words: canonical transformations, a vector field, rotation.

Redaksiyaya daxil oldu: 23.09.2011-ci il.
Çapa imzalandı: 03.10.2011-ci il.